

國立屏科實驗高級中等學校115學年度第3次專任教師甄選

國中部 數學科教師 初試試題

※ 考試時間：10：00～12：00，共 120 分鐘。

※ 本試題為非選擇題，共 4 頁，滿分100分。

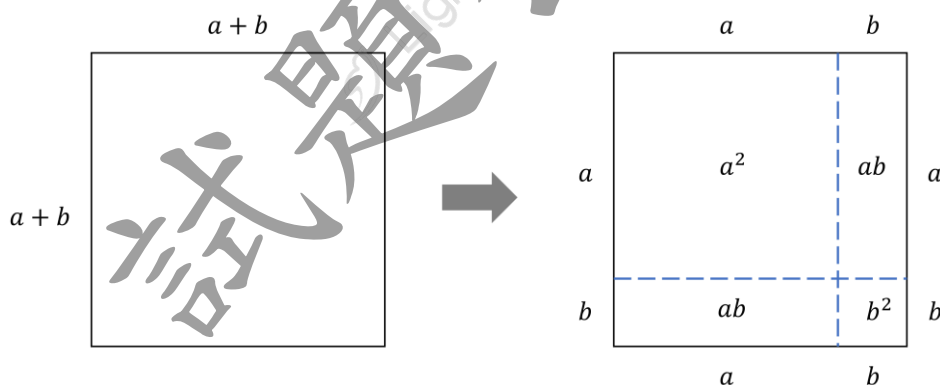
※ 答案卷共 5 頁，請務必清楚標示題號以供評閱。交卷時，請連同本試題卷一併繳回。

※ 請於答案卷中詳列計算過程，否則不予計分。

一、設正整數 n 恰有 16 個正因數 $1 = a_1 < a_2 < \dots < a_{16} = n$ 。若 $a_6 = 18$ 且 $a_9 - a_8 = 17$ ，試求滿足上述條件的所有正整數 n 。(12 分)

二、設 $\triangle ABC$ 的三邊長為連續整數，且最大角為最小角的 2 倍，試求 $\triangle ABC$ 的周長。(10 分)

三、從認知科學與神經科學的觀點來看，視覺表徵是促進數學理解的重要認知機制之一。由於大腦的工作記憶（Working Memory）容量有限，若僅以文字或符號公式（如八年級的「和的平方公式」）進行教學，學生往往需要投入大量工作記憶資源處理抽象符號，增加認知負荷。相對地，若將公式轉化為正方形面積的幾何圖形（如下圖），便能形成雙重編碼（Dual Coding），使資訊同時透過圖像與語文兩種表徵系統進行處理與記憶。圖形亦有助於將零散資訊整合為較大的知識單元（Chunking），降低工作記憶負荷，使學生能將更多認知資源投入概念理解與數學推理。



基於上述認知科學觀點，教師若欲運用視覺表徵協助學生理解「算幾不等式」(Arithmetic-Geometric Mean Inequality)，請回答下列問題：

1. 對任意兩個非負實數 a 與 b ，請寫出其算幾不等式代數形式。(2 分)
2. 請提供兩種不同的幾何視覺表徵 (Visual Representation)，並說明各圖如何協助學生由幾何直觀逐步建構算幾不等式的數學概念，進而發展數學論證能力。(10 分)

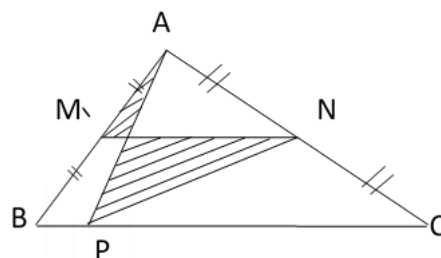
四、已知正實數 x, y, z, w 滿足 $2007x^2 = 2008y^2 = 2009z^2 = 2010w^2$ 且 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{w} = 1$ ，則

$$\sqrt{2007x + 2008y + 2009z + 2010w} = \underline{\hspace{2cm}}。 (5 \text{ 分})$$

五、有關極限 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|3 - 3x - x^2| - 1}{x - 1}$ 的值為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。(5 分)

六、右圖 $\triangle ABC$ 中， $\overline{AM} = \overline{MB}$ ， $\overline{AN} = \overline{NC}$ ，若 P 在 $\overline{BC}$

邊上，且 $\overline{BP} = \frac{1}{7}\overline{BC}$ ，則(斜線部分面積)： $\triangle ABC$ 面積 = $\underline{\hspace{2cm}}$ 。(5 分)

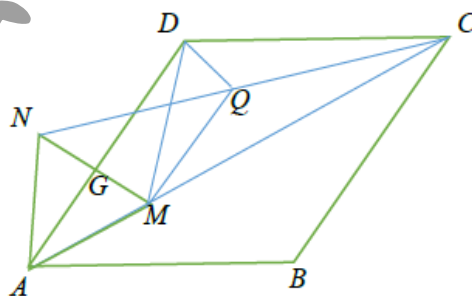


七、已知： n 個整數 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ ，他們的乘積是 n ，和是 0 。

試證： n 為 4 的倍數。(10 分)

八、如右圖，在菱形 $ABCD$ 中， $\angle BAD = 60^\circ$ ， M 為對角線 $\overline{AC}$ 上異於 A, C 的一點。以 $\overline{AM}$ 為邊，作一正 $\triangle AMN$ ，使得 $\overline{MN}$ 與 $\overline{AD}$ 交於 G 。連接 $\overline{NC}$ 、 $\overline{DM}$ ，且 Q 為 $\overline{NC}$ 的中點，連接 $\overline{DQ}$ 、 $\overline{MQ}$ 。

試證： $\overline{DM} = 2\overline{DQ}$ 。(10 分)



九、在古希臘時期，數學家阿基米德利用「窮竭法」發現了一個關於拋物線面積的優美幾何性質。在現代數學中，若我們有一個開口朝下且與 x 軸相交於兩點的二次函數 $y = ax^2 + bx + c$ (其中 $a < 0$)，設兩交點的 x 坐標為 α 與 β (且 $\beta > \alpha$)，則該拋物線與 x 軸所圍成的

「封閉區域面積 S_1 」可利用公式求得： $S_1 = \frac{|a|}{6}(\beta - \alpha)^3$

布達佩斯城市的景觀設計師小翰正準備建造一座拋物線造型的景觀拱橋。請根據上述資訊，回答下列問題：

1. 設計師小翰在設計圖上畫出了一座拱橋，其拋物線方程式為 $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 6$ 。

請分別求出此拋物線與 x 軸圍成的「拱門面積 S_1 」，以及由拋物線頂點與 x 軸上兩交點所連成的「內接三角形面積 S_2 」。並求出 $S_1:S_2$ 的最簡整數比。(8 分)

2. 設計師小翰發現，無論拱橋的高低寬窄如何改變，只要它是一條與 x 軸交於相異兩點的拋物線，其「拱門面積 S_1 」與「內接三角形面積 S_2 」的比值永遠是一個固定的常數。

請利用給定的拋物線一般式 $y = ax^2 + bx + c$ ($a < 0$ 且與 x 軸交於 $(\alpha, 0)$ 、 $(\beta, 0)$ ，其中 $\beta > \alpha$)，證明 S_1 與 S_2 的比值為定值，並求出此定值為何？(8 分)

十、臺灣《十二年國民基本教育課程綱要》自 108 年正式上路後，各領域教學不侷限於以往的學科知識，也以培養學生的軟實力為目標，因此，「素養」便成為重要的課程主軸。以下，是國中教育會考委辦單位-國立臺灣師範大學心理與教育測驗研究發展中心（簡稱臺師大心測中心）所提出關於「素養導向評量的特徵與誤解」之說明：

● **試題特徵**

1. 佈題強調真實的情境與真實的問題(包含日常生活情境或是學術探究情境)。
2. 評量時強調總綱核心素養或各領域素養、學科本質或學習重點。

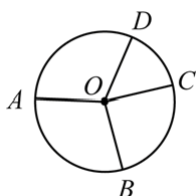
● **常見誤解**

1. 僅強調生活實踐，課堂教學偏廢基本的學科能力(知識、概念、技能)。
2. 設計題目時僅「為了增加情境，為了看似生活化」，沒有讓學生實際應用各領域素養來解決問題。

陳老師在數學領域社群會議中自豪地向同儕展示他最近設計的一組「素養試題」，內容如下：

隨著全球氣候變遷日益劇烈，極端氣候事件頻發，為積極響應《巴黎協定》的淨零碳排願景，以及落實聯合國推動的十七項 SDGs 永續發展目標（Sustainable Development Goals），各國政府無不致力於推動城市轉型。位於亞洲科技樞紐的星耀市，在市長與跨部會產官學專家歷經長達三年的密集會議、環境影響評估以及多次公民參與公聽會後，終於拍板定案一項名為「明日之星：韌性綠洲」的都市更新巨型計畫。

此計畫旨在將原本荒廢的百年舊工業區，全面翻新並重新定義為具備微電網自給自足能力的「圓形智慧生態實驗園區」。為了象徵資源的無盡循環、循環經濟的生生不息，以及人與自然共存的和諧，國際知名建築團隊特意將園區的整體腹地邊界設計為一個完美的幾何圓形，如圖所示。



在該圓形園區的正中央 O 點，市府斥資百億打造了一座結合量子計算、5G 毫米波傳輸與大數據分析的「AI 核心環境中樞塔」。這座中樞塔肩負著 24 小時不間斷地監控全區碳足跡、

微氣候變化以及調節各區能源分配的重責大任。為了有效落實區域治理與資源最大化利用，都市計畫委員會將這個廣大圓形園區的圓周邊界，精準地劃分為四個具備不同戰略意義的專屬功能區塊。這四個區塊的交界處，分別設立了結合擴增實境（AR）導覽技術的四大地標建築，並於圖面上標示為 A、B、C、D 四個節點。

為了確保園區內的生態多樣性不受破壞，同時滿足前瞻科技的實驗需求，跨國專家小組做出了以下極度嚴格的空間配置規劃。

規劃一：為了確保生態系統的動態平衡，「綠能風力發電區」（介於地標 A 與 D 之間的圓弧邊界，對應 $\widehat{AD}$ ）與「水資源淨化保育區」（介於地標 A 與 B 之間的圓弧邊界，對應 $\widehat{AB}$ ），這兩區的護城河邊界長度必須在施工時做到毫釐不差的完全相等，亦即滿足 $\widehat{AB} = \widehat{AD}$ 之條件。

規劃二：為了配合次世代太陽能板的黃金日照追蹤角度，AI 中樞塔 O 點對準「水資源淨化保育區」兩端點的監控夾角，必須透過精密儀器精準設定為 $\angle AOB = 108^\circ$ 。

規劃三：為了防止高頻訊號對候鳥遷徙造成電磁波干擾，「低軌衛星與通訊實驗區」（介於地標 CD 之間的圓弧邊界，對應 $\widehat{CD}$ ）的核心輻射監控夾角，經環評嚴格規範，必須設定為 $\angle DOC = 54^\circ$ 。

規劃四：園區外圍剩下的最後一塊圓弧邊界（介於地標 B 與 C 之間，對應 $\widehat{BC}$ ），則全數劃分為結合在地文創與小農市集的「市民休閒商業區」。

今年底，市議會即將針對該園區的「外圍護欄景觀工程」進行年度預算審查。議員們需要根據各功能區塊的「邊界實際長度」來按比例分配工程款項。身為工程局的首席數據分析師，請根據上述都市計畫委員會提供的設計藍圖與角度規範，協助計算出以下工程比例以利預算編列，則：

1. 請問「水資源淨化保育區」的邊界長度（ $\widehat{AB}$ ）是「低軌衛星與通訊實驗區」邊界長度（ $\widehat{CD}$ ）的多少倍？
2. 請問「市民休閒商業區」的邊界長度（ $\widehat{BC}$ ）是「綠能風力發電區」邊界長度（ $\widehat{AD}$ ）的多少倍？

請問：

1. 請依據「素養導向評量的特徵與誤解」之內容評析陳老師所編擬之試題，該題組可稱為「素養導向試題」嗎？請一一列舉說明並陳述你的理由。（5 分）
2. 請以九年級學習內容之「點、線、圓」或「圓心角與圓周角」：
 - (1) 設計一道「素養導向試題」。
 - (2) 說明學生可能的解題策略。
 - (3) 列舉學生可能出現的錯誤類型或是迷思概念。（10 分）