

國立屏科實驗高級中等學校115學年度第1次專任教師甄選

高中部 數學科教師 初試試題

※ 考試時間：10：00～12：00，共 120 分鐘。

※ 本試題為非選擇題，共 3 頁，滿分100分。

※ 答案卷共 5 頁，請務必清楚標示題號以供評閱。交卷時，請連同本試題卷一併繳回。

一、設函數 $f(x) = \sqrt{x^2 + 4} + \sqrt{x^2 - 2x + 2}$ ，請使用兩種不同的方法去求函數 $f(x)$ 的最小值及此時 x 的值為何？(8 分，計算過程請詳述)

二、已知數列 $\{a_n\}$ 滿足 $a_1 = \frac{1}{2}$ ， $a_{n+1} = \frac{na_n}{(n+1)(na_n+1)}$ ，求 $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ 。(6 分，計算過程請詳述)

三、設 $\triangle ABC$ 的內角 $\angle A, \angle B, \angle C$ 的對邊分別為 a, b, c ，若 $a \cos C - \frac{1}{2}c = b$ ，試求

(一) $\angle A$ 的大小為何？(3 分，計算過程請詳述)

(二) 若 $a = 3$ ，求 $\triangle ABC$ 的周長 l 的取值範圍為何？(5 分，計算過程請詳述)

四、利用單點透視法將坐標空間的點繪製在畫布的坐標平面上。

已知

(一) 空間中與 y 軸平行的直線，在畫布上的消失點為 $(0, 15)$

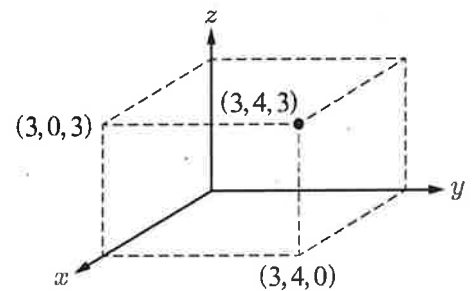
(二) 空間中與 z 軸平行的直線，在畫布上都與 y 軸平行

若點 $(0, 0, 0)$ 、 $(3, 4, 0)$ 、 $(3, 0, 3)$ 繪在畫布上分別為 $(0, 0)$ 、

$(\frac{13}{5}, 2)$ 、 $(3, 3)$ ，則點 $(3, 4, 3)$ 繪在畫布上的 y 坐標

為_____。(化為最簡分數)(8 分，計算過程請詳述)

(註：右圖為三點 $(3, 4, 0)$ 、 $(3, 0, 3)$ 、 $(3, 4, 3)$ 於坐標空間的位置關係)



五、求極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10^{10}}{n^{10}} [1^9 + 2^9 + 3^9 + \dots + (2n)^9] =$ _____。(8 分，計算過程請詳述)

六、已知點 $A(a, b)$ 在圖形 $y = f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 10x - 7$ 上，若直線 L 為以 A 點為切點的切線，且直線 L 和兩坐標軸可圍成一個等腰三角形，試求 $(a, b) =$ _____。(8 分，計算過程請詳述)

七、在區間 $[0, 2\pi]$ 中，函數 $y = f(x) = \sin(2\pi \cdot \sin(x))$ 與 x 軸共有 m 個交點，其中有 n 個交點與 x 軸相切，試求 $(m, n) =$ _____。(8 分，計算過程請詳述)

八、設空間有四個平面 $E_1: x+y+z=0$ 、 $E_2: x+y+z=3$ 、 $E_3: x+y+z=9$ 及 $E_4: x+y-z=0$ ，若 E_4 上有一正三角形 ABC ，而 A 、 B 、 C 分別也在 E_1 、 E_2 、 E_3 上，試求正三角形 ABC 的面積為_____。(8 分，計算過程請詳述)

九、

已知複數 z 滿足 $z^n + z^{-n} + 2 = 0$ ，其中 n 為正整數，將 z 用極式表示為 $r(\cos \theta + i \sin \theta)$ ，且 $r > 0$ 。試選出正確的選項。

- (1) $r = 1$
 (2) n 不能是偶數
 (3) 對給定的 n ，恰有 $2n$ 個不同的複數 z 滿足題設
 (4) θ 可能是 $\frac{3\pi}{7}$
 (5) θ 可能是 $\frac{4\pi}{7}$

以上為(106指考數甲)的題目，請給出正確答案並針對每一個選項解釋其作法。

(10分，計算過程請詳述)

十、

小明想要安排從星期一到星期五共五天的午餐計畫。他的餐點共有四種選擇：牛肉麵、大滷麵、咖哩飯及排骨飯。小明想要依據下列兩原則來安排他的午餐：

- (甲) 每天只選一種餐點但這五天中每一種餐點至少各點一次
 (乙) 連續兩天的餐點不能重複且不連續兩天吃麵食

根據上述原則，小明這五天共有幾種不同的午餐計畫？

- (1) 52 (2) 60 (3) 68 (4) 76 (5) 84

上述為 106 學測的一道試題，近年來學生開始頻繁使用 AI 來學習，若有學生將此道題目給 Gemini Pro，如下圖，看到學生將 AI 的做法一字不漏地抄寫在課本/講義的作答區，試問：

(一)身為教師的你想要對學生示範利用 AI 本身來改善 Gemini 原先繁瑣的步驟，

請就你本身對使用 AI 工具的經驗，寫出可以對 AI 改善的指令或是方式。(5分)

(二)在 AI 引入的世代下，你認為第一線的教師應該做哪些改變？(5分)

情況一：重複吃的餐點是「麵食」

代表這 5 天的餐點組成為：3 碗麵、2 碗飯。

1. 安排麵與飯的順序：

因為有 3 碗麵，且「麵食不能連續吃」，所以這 3 碗麵只能排在第 1、3、5 天。飯食只能排在第 2、4 天。

- 固定陣型：麵-飯-麵-飯-麵

2. 選擇重複的麵食：從 2 種麵中選 1 種吃兩次。

- 方法數： $C_2^2 = 2$ 種（例如選了牛肉麵，餐點就是 牛、牛、大滷）。

3. 排列麵食：將選好的 3 碗麵排入第 1、3、5 天。

- 這 3 碗麵中有 2 碗是一樣的，排列數為 $\frac{3!}{2!} = 3$ 種。
- （註：因為麵被飯隔開了，所以相同麵食絕對不會連續，符合條件）。

4. 排列飯食：將 2 碗不同的飯排入第 2、4 天。

- 方法數： $2! = 2$ 種。

☛ 情況一方法數： $2 \times 3 \times 2 = 12$ 種。

3. 排列飯食 (需避開相同的飯連續) :

將 (A, A, B) 這三碗飯排入上述陣型的「飯位」。(A, A, B) 的直線排列有 3 種：AAB、ABA、BAA。我們逐一檢查這 6 種陣型中，哪些排列會導致兩碗 A 連續：

- 陣型 (1) [飯在 2, 4, 5, 相鄰是 4,5] : AAB (合)、ABA (合)、BAA (不合, 4,5皆為A)。 → 2 種
- 陣型 (2) [飯在 2, 3, 5, 相鄰是 2,3] : AAB (不合)、ABA (合)、BAA (合)。 → 2 種
- 陣型 (3) [飯在 2, 3, 4, 全相鄰] : 只能 A、B 交錯, 即 ABA。 → 1 種
- 陣型 (4) [飯在 1, 3, 5, 全不相鄰] : 怎麼排都可以。 → 3 種
- 陣型 (5) [飯在 1, 3, 4, 相鄰是 3,4] : AAB (合)、ABA (合)、BAA (不合)。 → 2 種
- 陣型 (6) [飯在 1, 2, 4, 相鄰是 1,2] : AAB (不合)、ABA (合)、BAA (合)。 → 2 種
- 合法飯食排法總和 : $2 + 2 + 1 + 3 + 2 + 2 = 12$ 種。

4. 排列麵食 : 將 2 碗不同的麵排入陣型中的 2 個麵位。

- 方法數 : $2! = 2$ 種。

👉 情況二方法數 : 2 (選飯) \times 12 (合法飯排法) \times 2 (排麵) = 48 種。

情況二：重複吃的餐點是「飯食」

代表這 5 天的餐點組成為：2 碗麵、3 碗飯。

1. 安排麵與飯的順序陣型：

先排 3 碗飯，產生 4 個空隙 (包含頭尾)：飯 飯 飯。

將 2 碗麵插入這 4 個空隙中以確保麵不連續，選法有 $C_2^4 = 6$ 種陣型：

- 陣型 (1) : 麵-飯-麵-飯-飯 (飯在 2, 4, 5 天)
- 陣型 (2) : 麵-飯-飯-麵-飯 (飯在 2, 3, 5 天)
- 陣型 (3) : 麵-飯-飯-飯-麵 (飯在 2, 3, 4 天)
- 陣型 (4) : 飯-麵-飯-麵-飯 (飯在 1, 3, 5 天)
- 陣型 (5) : 飯-麵-飯-飯-麵 (飯在 1, 3, 4 天)
- 陣型 (6) : 飯-飯-麵-飯-麵 (飯在 1, 2, 4 天)

2. 選擇重複的飯食：從 2 種飯中選 1 種吃兩次。

- 方法數 : $C_1^2 = 2$ 種 (假設選了咖哩飯，餐點為 咖哩A、咖哩A、排骨B)。

十一、國立屏科實中自設校以來便積極推動老師指導學生參加各項競賽，尤其今年學生首次參加 2026 台灣國際科學展覽會即獲得「行為與社會科學科」三等獎及「地球與環境科學科」四等獎的殊榮。作為一名數學老師，你覺得指導學生做科展應該有什麼樣的步驟，又該注意那些事情，請以條列的方式說明之。(8 分)

十二、教育部去年公布「社會情緒學習 (SEL)」中長程計畫，若校內欲推動 SEL，請說明你會如何將社會情緒學習的理念，實質運用在常日的數學課堂教學中？請簡述社會情緒學習的概念，並舉出一個具體的實踐策略。(10 分)